DM Évaluation de performances réseaux

Édouard Lumet [redacted]

Novembre 2018

1 Comparaison de files d'attente

1. Le temps moyen de réponse du système 1 est :

$$E[R_1] = \frac{1}{2\mu\lambda}$$

2. Le temps moyen de réponse du système 2 est :

$$E[R_2] = \frac{1}{\mu - \frac{\lambda^2}{4\mu}}$$

3. Dans le cas du système 3, on peut appliquer le théorème de Jackson. Chaque file évolue donc comme une file M/M/1
$Soit\ e_i : \frac{\lambda e_i}{\mu_i} = \frac{\lambda}{2\mu_i} < 1\, car\, \lambda < 2\mu$
Le nombre moyen de passages d'un client dans chacune des 2 files est donc :

$$E[L_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu_i}}{1 - \frac{\lambda_i}{2\mu_i}} = \frac{\lambda}{2\mu_i - \lambda_i}$$

Le temps moyen de réponse du système 3 est quant à lui :

$$Soit\ E[R_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda e_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda} : E[R] = \sum_{i=1}^{2} E[R_i] = \frac{2}{\mu - \lambda}$$

4. Comme $E[R] = \frac{E[L]}{\lambda}$, E[R] est une combinaison linéaire de E[L]. Or $\lambda > 0$ donc comparer les temps de réponses moyens est identique à comparer les nombres moyens de clients pour chaque système.

<u>Comparaison des systèmes 1 et 2</u>

$$E[L_2] = \frac{2\rho}{(1-\rho)(1+\rho)} = \frac{2}{1+\rho} \times \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2}{1+\rho} \times E[L_1]$$

$$\implies \frac{E[L_2]}{E[L_1]} = \frac{2}{1+\rho}$$

$$or\ 0 < \rho < 1$$

$$d'o\grave{u}\ 1 < 1+1 < 2 \implies 1 > \frac{1}{1+\rho} > \frac{1}{2} \implies 2 > \frac{2}{1+\rho} > 1$$

$$donc\ \frac{E[L_2]}{E[L_1]} = \frac{2}{1+\rho} > 1 \implies \underline{E[L_2] > E[L_1]}$$

<u>Comparaison des systèmes 2 et 3</u>

$$Soient\ E[L_2] = \frac{2\rho}{(1-\rho)(1+\rho)}\ et\ E[L_3] = \frac{2\rho}{1-\rho} : E[L_2] = \frac{2\rho}{(1-\rho)} \times \frac{1}{1+\rho} = E[L_3] \times \frac{1}{1+\rho}$$

<u>Comparaison des trois systèmes</u>

$$On\ sait\ que : \frac{E[L_2]}{E[L_3]} = \frac{1}{1+\rho} < 1\ donc\ E[L_2] < E[L_3]$$

$$Pour\ conclure\ E[L_1] < E[L_2] < E[L_3]\ donc\ E[R_1] < E[R_2] < E[R_3]$$

5. En se dirigeant vers la file la moins remplie, le cas où S2 peut être plus performant que S3 n'est plus possible. Posons S4 l'évolution de S3, prenons l'exemple avec 2 clients comme suit :

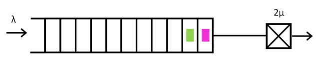


FIGURE 1 – Système 1

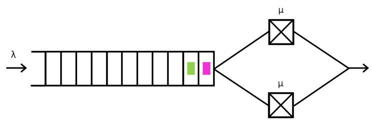


FIGURE 2 – Système 2

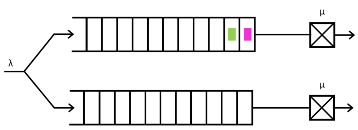


FIGURE 3 – Système 3

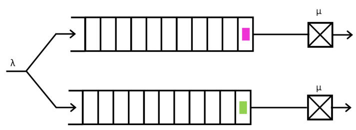
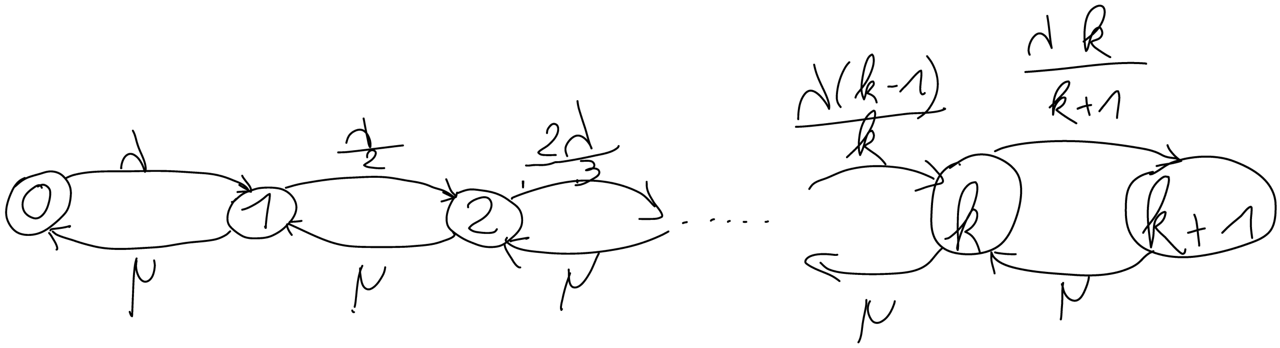


FIGURE 4 – Système 4

2 File avec arrivées découragées

1. La chaîne de Markov associée au nombre de clients dans la file est :



2. Voici les expressions issues des différentes coupes :

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

$$P_3 = \frac{2\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda^2}{6\mu^2} P_1 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0$$

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0$$

Détermination de P_0 :

$$\forall i > 0 : \sum_{i=0}^{+\infty} P_i = 1$$

$$\implies P_0(1 + \sum_{i=0}^{+\infty} P_i) = 1$$

3 Unité de transmission de paquets

Dans un premier temps, nous considérons une taille de paquets exponentiellement distribuée.

1. La notation de Kendall est M/M/1. Il faut comprendre que le temps de service est représenté par le temps d'émission des paquets sur le lien en sortie. Or ce temps d'émission dépend de la capacité du lien (constante ici) et de la longueur des paquets. C'est pour cela que le temps de service suit une loi exponentielle.

2. Nombre moyen de paquets dans la file et temps moyen de réponse en fonction du taux d'arrivée.

On rappelle que $\rho = \frac{\lambda}{\mu C}$ *avec* $\mu C = 10^{-3}.10^{7} = 10^{4}$.

Pour $\lambda = 0,6$ et donc $\rho = \frac{0,6}{10^4} = 6.10^{-5}$:

$$E[L_{\lambda=0,6}] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{6.10^{-5}}{1-6.10^{-5}} \approx 6.10^{-5}$$

$$E[R_{\lambda=0,6}] = \frac{E[L_{\lambda=0,6}]}{\lambda} = \frac{6.10^{-5}}{0,6} = 10^{-4}$$

Pour $\lambda = 0,9$ et donc $\rho = \frac{0,9}{10^4} = 9.10^{-5}$:

$$E[L_{\lambda=0,9}] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{9.10^{-5}}{1-9.10^{-5}} \approx 9.10^{-5}$$

$$E[R_{\lambda=0,9}] = \frac{E[L_{\lambda=0,9}]}{\lambda} = \frac{9.10^{-5}}{0,9} = 10^{-4}$$

On peut noter que $E[R_{\lambda=0,6}] = E[R_{\lambda=0,9}]$. Quelque soit la charge de trafic, le temps moyen de réponse pour des paquets de taille exponentiellement distribuée est identique.

Nous considérons maintenant un taille de paquets constante. La notation de Kendall est alors M/D/1.

4 Économie d'énergie d'un serveur vidéo

1. Temps moyen de réponse

Pour les switches 1 et 2, voici les expressions de $E[L]$ et $E[R]$:
Soient $\begin{cases} e_i = \frac{1}{2} \\ \rho_i = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $E[L_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$:

$$E[L_1] = E[L_2] = 1$$

Soit $E[R_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda e_i}$:

$$E[R_1] = E[R_2] = \frac{1}{\mu}$$

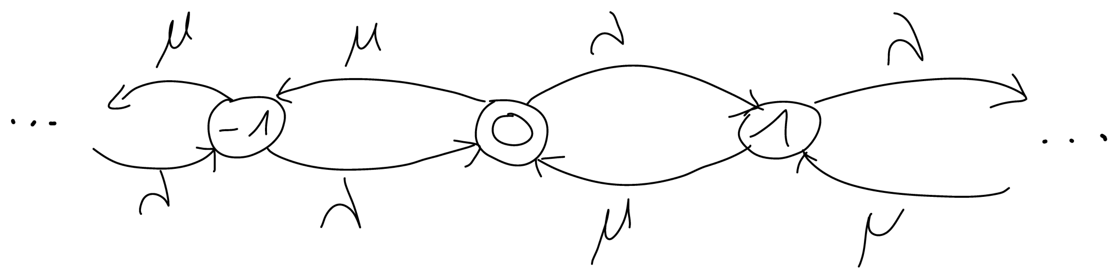
$$\implies E[R] = \sum_{i=1}^{2} e_i E[R_i] = \frac{2}{\mu}$$

Et pour le switch 3, en appliquant le théorème de Jackson :

$$E[R_3] = \sum_{i=1}^{2} e_i E[R_i] = \frac{1}{2(\mu - \lambda} + \frac{1}{2(\mu - \lambda} = \frac{2}{2(\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

5 Système cyclique-multiserveur

1. $\{Dt, t \geqslant 0\}$ constitue une chaîne de Markov à temps continu car le temps de passage d'un état à un autre ne dépend pas de l'état précédent :



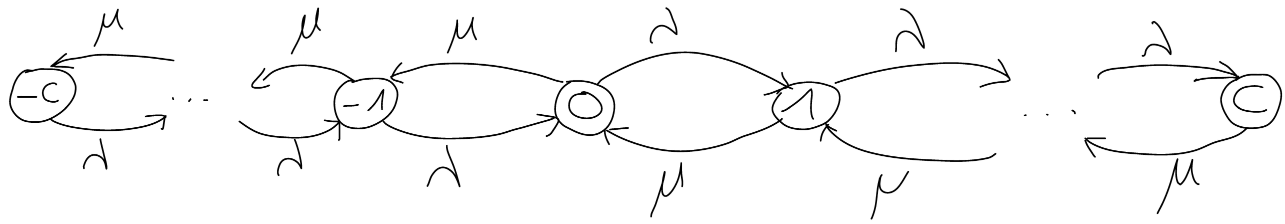
2. La chaîne n'est jamais ergodique car elle est non finie irréductible. Le nombre d'états est infini $(\lambda, \mu > 0)$:
- $\lambda > \mu \implies$ probabilité de passage $\to +\infty$
- $\lambda < \mu \implies$ probabilité de passage $\to -\infty$
- $\lambda = \mu \implies$ états équiprobables : la probabilité d'atteindre un état en particulier tend vers 0

3. Les valeurs que peut prendre Dt sont :

$$(Dt \in [-C; C] \subset \mathbb{Z})$$

En effet, $Dt = (Rt - Vt)$ *or* $0 < Vt \leqslant C$ *et* $0 < Rt \leqslant C$

4. On a une file d'attente de type M/M/1/N dont la chaîne de Markov à temps continu est représentée par le graphe suivant :



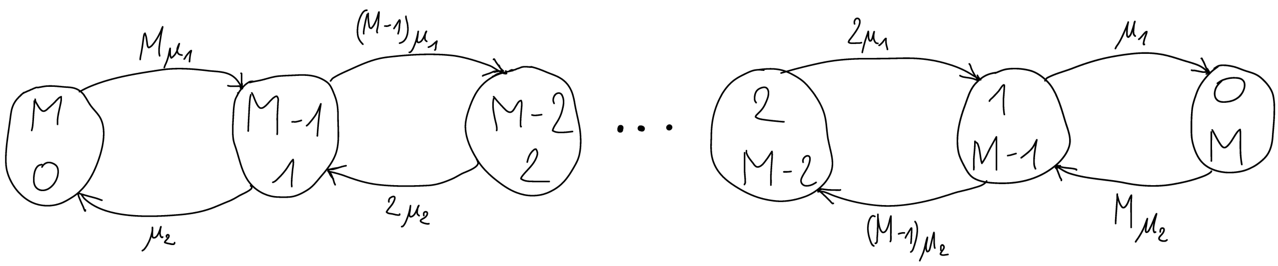
5. On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et on donne les probabilités stationnaires des différents états :

$$\begin{cases} \pi_{1R} = \pi_0 \rho \\ \pi_{1V} = \frac{\pi_0}{\rho} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_{2R} = \pi_0 \rho^2 \\ \pi_{2V} = \frac{\pi_0}{\rho^2} \end{cases}$$

$$\implies \pi_C = \pi_0 \rho^C + \frac{\pi_0}{\rho_C}$$

6 Réseaux de commutateurs

1. La chaîne de Markov des taux de transition est la suivante :



2. La propriété PASTA ne s'applique pas car le processus d'arrivée dépend du système lui-même, il n'est donc pas poissonnien. En effet, le processus d'arrivée varie selon les files d'attentes.

3. Probabilité P_k et condition d'ergodicité

$$P_1 = \frac{\mu_1}{M\mu_2} P_0$$

$$P_2 = \frac{2\mu_1}{(M-1)\mu_2} P_1$$

$$\implies P_M = \frac{M\mu_1}{\mu_2} P_{M-1}$$

La condition d'ergodicité permettant d'obtenir une chaîne de Markov fortement connexe est un nombre de serveurs fini.

Ensuite, on observe que par généralisation du résultat suivant :

$$\frac{3\mu_1}{(M-2)\mu_2} \times \frac{2\mu_1}{(M-1)\mu_2} \times \frac{\mu_1}{M\mu_2}$$

on a :

$$P_k = \frac{k!}{(M-(k-1))!} \times \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4. Temps de réponse moyen

$$E[R] = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

On note que ce résultat correspond à une file d'attente... sans attente. Il n'y a donc pas de file d'attente. En effet, le temps de service est $\frac{1}{\mu}$, on a donc la somme des deux temps de service, sans d'autres temps d'attente.